数理解析研究所講究録 1456 巻 2005 年 167-173

一般化されたオイラーの定数について

西沢 清子
KIYOKO NISHIZAWA
城西大学理学部
JOSAI UNIVERSITY

齋藤 真一
SHINICHI SAITO
城西大学大学院理学研究科
JOSAI UNIVERSITY

1 はじめに

本論文では Tom M. Apostol の 1999 年 [1] の論文を基に一般化されたオイラーの定数について最近の結果の一部を細部を補って紹介する。

$f(x)=\frac{1}{x}$ に対して決まる定数 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$ は『オイラーの定数』と呼ばれ、C または γ と書かれる。ここでは、連続関数 f は単調減少でかつ十分滑らかで、その導関数族が可積分という仮定の下で、f の一般化されたオイラーの定数を周期化されたベルヌーイ関数族を用いて評価を考察する。一方、同様に周期化されたベルヌーイ関数を用いた D. K. Knuth の論文 [2] があり、それとの関係も示しておく。

一般化されたオイラーの定数を求める具体的な例として、関数族 $\{f_k(x)=\frac{(\log x)^k}{x}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を取り上げる。このときこの関数族 $f_k(x)$ に対する一般化されたオイラーの定数はスティルチェス定数と呼ばれ、ツェータ関数の 1 のまわりのローラン展開式に現われる係数と一致している。また、数式処理システム Mathematica により第 3,5,7 階微分形式を用いたスティルチェス定数を評価式を用いて近似値を与えた。

2 オイラーの定数の一般化

定義 1

連続関数 f は区間 $[1,\infty)$ で定義された正値な、狭義単調減少で、$\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$ とする。数列 $\{d_n\}$ を以下のように定義する：

$$d_n=\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-\int_1^n f(x)dx,\qquad n=2,3,\cdots$$

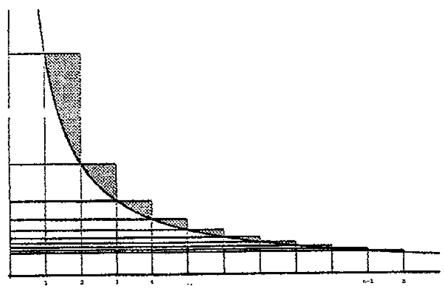

図 1: d_n

定理 2
連続関数 f は区間 $[1,\infty)$ で定義された正値で狭義単調減少、$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ とする。このとき、正値定数 $C(f)$ および数列 $E_f(n)$ で次の式を満たすものが存在する：

$$C(f)<f(1), \qquad \alpha<E_f(n)<f(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\int_1^n f(x)dx+C(f)+E_f(n), \qquad n=2,3,\cdots$$

定義 3
連続関数 f は区間 $[1,\infty)$ で定義された正値で、狭義単調減少のとき、$C(f)=\lim_{n\to\infty} d_n$ を f に関する一般化されたオイラーの定数と呼ぶ。

ここで周期ベルヌーイ関数 $P_k(x)$ を以下のように定義する。
$P_1(x)$ を次のように定める。

$$P_1(x)=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & x\neq \text{整数} \\ 0 & x=\text{整数} \end{cases}$$

このとき $P_k(x)(k\geq 2)$ は次のように定義される周期 1 の周期関数とする。

$$P_k(x)=k\int_0^x P_{k-1}(t)dt+c_k$$

ただし定数 $c_k=P_k(0)=P_k(1)$ の値は $\int_0^1 P_k(t)dt=0$ より定まる。

注意 1
定数の $c_k=P_k(0)=P_k(1)$ はベルヌーイ数 $B_k=B_k(1)=P_k(0)=P_k(1)$ と一致する。

3 一般化されたオイラーの定数の評価

連続関数 $f(x)$ が区間 $[1,\infty)$ で正値で単調減少のとき一般化されたオイラーの定数が存在したが、さらに f の滑らかさの条件 $C^{(2m+1)}-class$、導関数族の可積分性を付加して前節の結果を使うことで一般化されたオイラーの定数の評価を与えることが出来る。
この条件下でオイラーの和公式は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_1^n f(x)dx+\frac{1}{(2m+1)!}\int_1^n P_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)dx+ \\ &\quad \sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\{f^{(2r-1)}(n)-f^{(2r-1)}(1)\}+\frac{1}{2}\{f(1)+f(n)\}.\end{aligned}$$

定理 4
(オイラーの定数の一般型)
連続関数 $f(x)$ が区間 $[1,\infty)$ で正値で単調減少、$C^{(2m+1)}-class$ で、広義積分 $\int_1^\infty \left|f^{(k)}(x)\right| dx$, $(k=1,\cdots,2m+1)$ が存在するとき、f に対する一般化されたオイラーの定数は次のように表せる

$$C(f)=\frac{1}{2}f(1)-\sum_{r=1}^{m}\frac{B_{2r}}{(2r)!}f^{(2r-1)}(1)+\frac{1}{(2m+1)!}\int_1^\infty P_{2m+1}(x)f^{(2m+1)}(x)dx$$

また、$C(f)$ と $(\sum_{k=1}^{n} f(x) - \int_1^n f(x)dx)$ の誤差 $E_f(n)$ は次式で示される:

系 5
(誤差評価式)

$$\begin{aligned} E_f(n) &= \left(\sum_{k=1}^{n} f(x) - \int_1^n f(x)dx\right) - C(f) \\ &= \frac{1}{2}f(n) + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n) - \frac{1}{(2m+1)!}\int_n^\infty P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x)dx \end{aligned}$$

3.1 Apostol の方法によるオイラーの定数の評価

オイラーの定数は

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n - E_f(n)$$

と表現できる。この定数の近似値を求めるためにこれまでに得られた定理を $f(x) = \frac{1}{x}$ に適用すればしまとめてみれば以下の評価式が得られる。このとき $E_f(n)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_f(n) &= \frac{1}{2}f(n) + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n) - \frac{1}{(2m+1)!}\int_n^\infty P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x)dx \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\left(-\frac{(2r-1)!}{n^{2r}}\right) - \frac{1}{(2m+1)!}\int_n^\infty P_{2m+1}(x)\left(-\frac{(2m+1)!}{x^{2m+2}}\right)dx \\ &= \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\left(-\frac{(2r-1)!}{n^{2r}}\right) + \int_n^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx \end{aligned}$$

とでき、ベルヌーイ多項式の性質 $|P_{2m+1}(x)| \le (2m+1)|B_{2m}|$ より

$$\left|\int_n^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx\right| \le (2m+1)|B_{2m}| \int_n^\infty \frac{1}{x^{2m+2}}dx$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^{2m+2}} = \left[-\frac{1}{(2m+1)x^{2m+1}}\right]_n^\infty = \frac{1}{(2m+1)n^{2m+1}}$$

従って、Apostol の方法によれば以下の評価式を得る:

$$\left|\int_n^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx\right| \le \frac{B_{2m}}{n^{2m+1}}$$

3.2 Knuth の方法によるオイラーの定数の評価

オイラーの定数について計算するのに Knuth は論文 [2] で $f(x) = \frac{1}{x}$ に対してのオイラーの和公式をやはり周期化されたベルヌーイ多項式を用いて与えている。評価式中の $P_k(x)$ はフーリエ級数を使っていることが本論文と異なる点である。以下にその評価を示しておく。

$$\left|\int_n^\infty \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}}dx\right| \le \frac{4}{n}\sqrt{\frac{m}{\pi}}\left(\frac{m}{n\pi e}\right)^{2m}.$$

3.3　$f(x) = \frac{1}{x}$ の場合の Apostol と Knuth の評価比較

$f(x) = dfrac1x$ に対するオイラーの定数は次のように表現される: $C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n - E_f(n)$. f を $c^{(2m+1)} - class$ の関数として $m = 3$ の場合について考える。$f^{(2m+1)}(x) = -(2m+1)!/x^{2m+2}$ より

$$\int_1^{\infty} \left| f^{(7)}(x) \right| dx = \int_1^{\infty} \left| -\frac{5040}{x^8} \right| dx = 720$$

誤差項である $E_f(n)$ は

$$\begin{aligned} E_f(n) &= \frac{1}{2n} - \frac{B_2}{2n^2} - \frac{B_4}{4n^4} - \frac{B_6}{6n^6} + \int_n^{\infty} \frac{P_7(x)}{x^8} dx \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \int_n^{\infty} \frac{P_7(x)}{x^8} dx, \end{aligned}$$

$|P_7(x)| \leq 7|B_6| = \frac{1}{6}$ より

$$e(n) = \left| \int_n^{\infty} \frac{P_7(x)}{x^8} dx \right| \leq \frac{1}{6} \int_n^{\infty} \frac{1}{x^8} dx = \frac{1}{42n^7}$$

以上からオイラーの定数は、次の評価式を得ることができる

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} + e(n), \qquad 0 \leq |e(n)| \leq \frac{1}{42n^7}$$

3.3.1　Apostol と Knuth によるオイラーの定数の評価の比較

Knuth の 1962 年の論文 [2] ではオイラーの定数を 1271 桁まで求められているこのとき Knuth の評価式において $m = 250, n = 10000$ として示している。ここでは Apostol の周期化されたベルヌーイ関数による評価式において同様に $m = 250, n = 10000$ として比較してみる。

Apostol の評価式

$$\left| \int_n^{\infty} \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}} dx \right| \leq \frac{B_{2m}}{n^{2m+1}}$$

$$\left| \int_{10000}^{\infty} \frac{P_{501}(x)}{x^{502}} dx \right| < 10^{-1268}$$

Knuth の評価式

$$\left| \int_n^{\infty} \frac{P_{2m+1}(x)}{x^{2m+2}} dx \right| \leq \frac{4}{n} \sqrt{\frac{m}{\pi}} \left(\frac{m}{n\pi e} \right)^{2m}$$

$$\left| \int_{10000}^{\infty} \frac{P_{501}(x)}{x^{502}} dx \right| < 10^{-1269}$$

Knuth の評価に比べ Apostol の評価はこの条件において劣るが微積分とベルヌーイ数を用いた初等的な Apostol の方法でもほぼ同様な評価が出来ることがわかる。

3.4　関数族 $f_k(x) = \frac{(\log x)^k}{x}$ とスティルチェスの定数

ここでは関数を具体的に以下のものとして考察していくことにする。

$$f_k(x) = \frac{(\log x)^k}{x} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$f_k(x)$ は、十分先で単調減少であり、従って $C(f)$ が存在し

$$C(f) = \frac{1}{2}f(1) - \sum_{r=1}^{m} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f^{(2r-1)}(1) + \frac{1}{(2m+1)!} \int_1^{\infty} P_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx$$

と表現される。

3.5 ツェータ関数のローラン展開

$Re(s) > 1, \quad 0 < a \le 1$ で定義される Riemann-Hurwitz zeta 関数 $\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$ の $s = 1$ を中心としローラン展開すると

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k(a)}{k!} (s-1)^k, \quad s \ne 1$$

特に $\zeta(s,1) = \zeta(s)$、 また $\gamma_k(1)$ をγ_k とすると展開は:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k.$$

これは $s = 1$ を一次の極とする解析関数であることを示している。Stieltjes は定数 γ_k を次のように表現できることを示した。

$$\gamma_k = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\log^k j}{j} - \frac{\log^{k+1}(n)}{k+1} \right\} \quad k = 1, 2, \cdots$$

特に γ_0 のときオイラーの定数は γ となる。このことより関数族 $f_k(x) = \frac{(\log x)^k}{x}$ に対して決まる一般化されたオイラーの定数はスティルチェス定数 γ_k と一致している:$C(f_k) = \gamma_k$

3.6 スティルチェス定数の評価

前章の結果を元に数式処理システム Mathematica を用いて実際に数値計算の結果を与える。

3.6.1 γ_1 の第 3 階微分形式による評価

$f_1(x)$ に対する第 3 階微分形式 $(m = 1)$ を用いたときのスティルチェス定数 γ_1 は

$$\gamma_1 = C(f_1)_{m=1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} - \int_1^n \frac{\log x}{x} dx - \left(\frac{\log n}{2n} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - \log n}{n^2} \right) + e(n)$$

$$0 < e(n) \le \frac{1}{12} \left| \frac{3 - 2\log n}{n^3} \right|$$

と表現できる。実行結果を表 1 にまとめる。$n = 1000$ で小数点以下 13 桁迄求められていることがわかる。

3.6.2 γ_1 の第 5 階微分形式による評価

$f_1(x)$ に対する第 5 階微分形式 $(m=2)$ を用いたときのスティルチェス定数 γ_1 は

$$\gamma_1 = C(f_1)_{m=2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} - \int_1^n \frac{\log x}{x} dx - \left(\frac{\log n}{2n} + \frac{1-\log n}{12n^2} - \frac{11 - 6\log n}{720n^4} \right) + e(n)$$

$$0 < e(n) \le \frac{1}{720} \left| \frac{50 - 24\log n}{n^5} \right|$$

と表現できる。実行結果を表 1 にまとめる。$n = 1000$ で小数点以下 19 桁迄求められていることがわかる。

3.6.3 γ_1 の第 7 階微分形式による評価

$f_1(x)$ に対する第 7 階微分形式 $(m=3)$ を用いたときのスティルチェス定数 γ_1 は

$$\begin{aligned}\gamma_1 = C(f_1)_{m=3} \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} - \int_1^n \frac{\log x}{x} dx \\ &\qquad - \left(\frac{\log n}{2n} + \frac{1-\log n}{12n^2} - \frac{11 - 6\log n}{720n^4} + \frac{274 - 120\log n}{30240n^6} \right) + e(n)\end{aligned}$$

$$0 < e(n) \le \frac{1}{840} \left| \frac{49 - 20\log n}{n^7} \right|$$

と表現できる。実行結果を表 1 にまとめる。$n = 1000$ で小数点以下 25 桁迄求められていることがわかる。

n	$C(f_1)_{m=1}$	$C(f_1)_{m=2}$	$C(f_1)_{m=3}$
1	-0.083333333333333	-0.068055555555555555555	-0.077116402116402116402116402116
2	-0.073332478890782	-0.072738631936212718103	-0.072837229787947179166918757242
3	-0.072885765268039	-0.072810176683197676196	-0.072816625618707644317386427203
4	-0.072829596396241	-0.072815044346364466828	-0.072815913408488774556398071459
5	-0.072818669255945	-0.072815683983666570892	-0.072815855131709973872709113170
6	-0.072816072863255	-0.072815805541598084397	-0.072815847351653316858462111864
7	-0.072815443819025	-0.072815834547943486467	-0.072815845929093262429479620176
8	-0.072815341811284	-0.072815842519715915141	-0.072815845606166153649481265438
9	-0.072815382687922	-0.072815844877685623236	-0.072815845520657115249411068808
10	-0.072815454528649	-0.072815845571782930404	-0.072815845495387058734843278003
50	-0.072815842712503	-0.072815845484090219705	-0.072815845483676584233502849664
100	-0.072815845244096	-0.072815845483685937660	-0.072815845483676724022257135229
500	-0.072815845483092	-0.072815845483676725859	-0.072815845483676724860582512700
1000	-0.072815845483634	-0.072815845483676724878	-0.072815845483676724860586357896
1500	-0.072815845483667	-0.072815845483676724862	-0.072815845483676724860586375107
2000	-0.072815845483673	-0.072815845483676724860	-0.072815845483676724860586375793

表 1: スティルチェス定数 γ_1(第 3,5,7 階微分形式による)

3.6.4 γ_1 の微分の深さ (m の値) と n の値の関係

スティルチェス定数の収束に関して微分の深さ (m の値) と n の値との関係を次の図に示す。

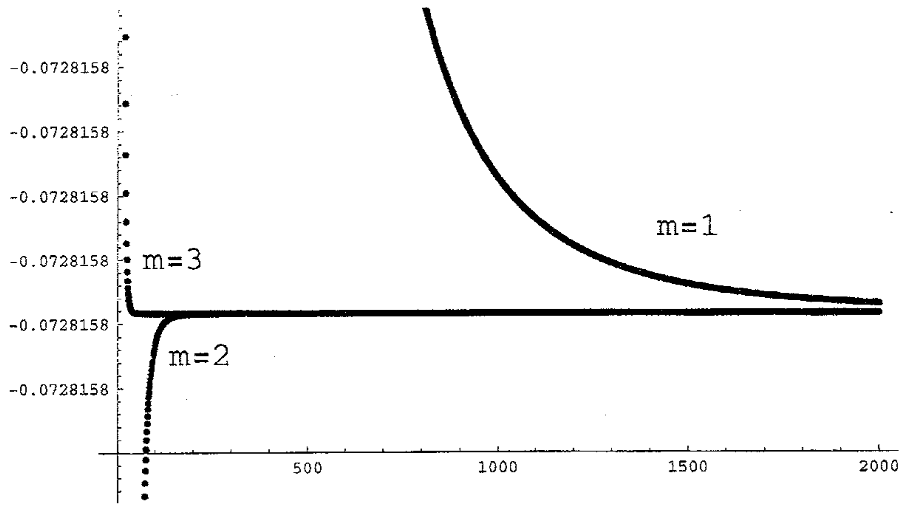

図 2: γ_1 の各微分形式による収束の様子

参 考 文 献

[1] T.M. Apostol, An Elementary View of Euler's Summation Formula, *MAA,Monthly*, 106, 409 – 418, 1999

[2] D.E. Knuth, Euler's cinstant to 1271 places, *Mathematics of Computation*, Volume 16, 275 – 281, 1962

[3] R. Kreminski, Newton-Cotes Integration For Approximating Stieljes (Generalized Euler) Constant, *Mathematics of Computation*, Volume 72, Number 243, 1379 – 1397, 2002

[4] 須藤 小百合, ベルヌーイ多項式とベルヌーイ数 -オイラー三角関数等式を巡って- 城西大学大学院理学研究科数学専攻 修士論文集 2001 年度, 65 – 111, 2002

[5] 齋藤 真一, オイラーの定数からスティルチェス定数へ 城西大学大学院理学研究科数学専攻 修士論文集 2004 年度, 97 – 131, 2005